

ЛЕКЦИЯ 1

БІРІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР

§1. Негізгі түсініктер және анықтамалар

1.1. Дифференциалдық теңдеу деп тәуелсіз айнымалыны, белгісіз функцияны және оның туындыларын байланыстыратын теңдікті атайды. Егер белгісіз функция тек бір ғана тәуелсіз айнымалыдан тәуелді болса, ондай теңдеуді жәй дифференциалдық теңдеу деп, ал бірнеше аргументтен тәуелді болса, ондай теңдеуді дербес туындылы дифференциалдық теңдеу деп атайды. Теңдеуге кіретін туындылардың ең жоғарғы реті дифференциалдық теңдеудің реті деп саналады.

Жәй дифференциалдық теңдеудің туынды бойынша шешілмеген түрі мынадай қатынаспен беріледі:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Мұндағы, x -тәуелсіз айнымалы, y -белгісіз функция, ал $y', y'', \dots, y^{(n)}$ - оның туындылары.

Әдетте, теңдеудің ең жоғарғы реттегі туындысы бойынша шешілген түрі қарастырылады. Ол былай жазылады:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді тәуелсіз айнымалылардың санына байланысты әртүрлі етіп жаза беруге болады. Солардың ішінен екі тәуелсіз айнымалыға байланысты түрін мына түрде жазуға болады:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right) = 0 \quad (3)$$

Мұндағы, x, y – тәуелсіз айнымалылар, u - белгісіз функция, ал $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}$ -

дербес туындылар.

Егер белгісіз функциялар бірнешеу болса, онда сол функциялар санына байланысты дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылады.

Дифференциалдық теңдеулердің шешімін табуды интегралдау деп атайды.

Жәй дифференциалдық теңдеудің шешімінің жазықтықтағы графигін интегралдық қисық деп атайды. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің шешімінің кеңістіктегі геометриялық кескінін интегралдық бет деп атайды.

1.2. Біз бұл тарауда бірінші ретті жәй дифференциалдық теңдеулерді қарастырамыз және осы теңдеудегі тәуелсіз айнымалыны нақты деп есептейміз. Мұндай теңдеудің туынды бойынша шешілмеген түрі төмендегі қатынаспен жазылады:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (4)$$

Мұнда x -тәуелсіз айнымалы, $y = y(x)$ – белгісіз функция, $y' = \frac{dy}{dx}$ - туынды, ал F -берілген функция. Осы теңдеудің туынды бойынша шешілген түрі былай жазылады:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5)$$

Мұндағы, $f(x,y)$ -жазықтықтағы кейбір D облысында үздіксіз бірімді анықталған функция деп есептелінеді.

Нақты сандар осінде $\langle a,b \rangle$ -аралығын қарастырайық. Бұл аралық тұйық та, ашық та, ақырлы немесе ақырсыз да болуы мүмкін. Соңғы жағдайда $a = -\infty, b = +\infty$ болуы мүмкін.

Анықтама-1. $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған $y = \varphi(x)$ функциясы (5) теңдеудің шешімі деп аталады, егер ол мынандай үш шартты қанағаттандырса:

- 1) $\varphi(x)$ функциясы $\langle a,b \rangle$ аралығының барлық нүктесінде дифференциалданатын болса;
- 2) $(x, \varphi(x)) \in D, \forall x \in \langle a,b \rangle$;
- 3) $\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)], \forall x \in \langle a,b \rangle$.

Ескерту-1. Егер $\langle a,b \rangle$ аралығы тұйық немесе жартылай тұйық болса, онда шешімнің сәйкес оңжақтық немесе солжақтық туындылары бар болуы шарт.

Ескерту-2. $f(x,y)$ функциясы D облысында үздіксіз болғандықтан, $\varphi'(x)$ функциясы $\langle a,b \rangle$ аралығында үздіксіз болады.

Ескерту-3. Шешімнің анықталу облысының байланысты жиын болуы қажетті шарт.

Мысалы, $\varphi(x) = (x - C)^{-1}$ функциясы $y^1 = y^2$ теңдеуінің шешімі бола алмайды, өйткені $x = C$ болғанда $\varphi(x)$ анықталмаған. Бұл жерде D облысы бүкіл XOY жазықтығы бола тұрып, екінші шарт орындалмайды. Бірақ, $\varphi(x)$ функциясы $(-\infty, C)$ және $(C, +\infty)$ аралықтарында шешім болады.

Кейбір жағдайларда (5) теңдеумен қатар оның аударылған түрі де қарастырылады:

$$\frac{dx}{dy} = f^{-1}(x, y) \quad (6)$$

Бұл теңдеу $f(x,y)$ функциясы D облысының кейбір нүктесінің жақын аймағында шексіздікке айналып жататын жағдайда қарастырылады.

Егер $f(x,y)$ шексіздікке ешқандай нүктеде жақындамаса, онда (5) және (6) теңдеулердің шешімдері, яғни олардың интегралдық қисықтары бір болады. Бұдан шығатын қорытынды: (5) теңдеудегі айнымалы x және y -тің кез келгенін тәуелсіз айнымалы деп қарастыруға болады да, екіншісін соған тәуелді функция деп алуға болады.

Сондықтан көп жағдайда (5) теңдеуді оның симметриялық түрінде жазады:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (7)$$

Мұндағы $M(x,y)$ және $N(x,y)$ функцияларын кейбір D облысында анықталған және үздіксіз деп есептейміз. Егер D облысындағы бір (x_0, y_0) нүктесінде

$$M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0 \quad (8)$$

болса, онда ол нүктені ерекше нүкте деп атайды.

(7) теңдеуді (5) және (6) түрге келтірсек:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{немесе} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \quad (9)$$

түрінде жазамыз. Ал соңғы (9) қатынасты мына түрде жазуға болады:

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)}. \quad (10)$$

Осы (10) теңдеуді де дифференциалдық теңдеудің симметриялық түрі деп атайды.

1.3. Жоғарыда келтірілген (5) дифференциалдық теңдеуге геометриялық түсініктеме беруге болады. Бұл теңдеудің шешімі XOY жазықтығындағы D облысында кейбір қисықты анықтайды. Осы D облысының кез келген бір (x_0, y_0) нүктесін алсақ, онда теңдеу бойынша ол нүктеде $\frac{dy}{dx}|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$ теңдігін аламыз. Ал туындының геометриялық мағынасы бойынша – белгілі бір нүктедегі туынды сол нүктеде функцияға жүргізілген жанаманың x осінің оң бағытымен жасайтын бұрыштың тангенсіне тең. Сондықтан әрбір нүктеге сол жанاماмен бағыттас бірлік вектор сәйкес қойсақ, онда берілген дифференциалдық теңдеу D облысында векторлар өрісін анықтайды. Осы өрісті бағыттар өрісі деп атайды. Теңдеудің интегралдық қисығының D облысында жүргізуге болатын басқа қисықтардан бір айырмасы – оның кез келген нүктесіне жүргізілген жанаманың бағыты сол нүктедегі өріс бағытымен беттесіп жатуы. Демек, геометриялық тұрғыдан дифференциалдық теңдеуді интегралдау дегеніміз кез келген нүктесіне жүргізілген жанамасының бағыты осы нүктедегі өріс бағытымен беттесіп жататын қисықты табу болып саналады.

Егер теңдеудің оң жағы (x_0, y_0) нүктесінде $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық болса, онда бұл нүктеде өріс анықталмаған деп есептеледі. Бірақ бұдан бұл нүктеге ұмтылатын интегралдық қисық болмайды деген ұғым тұмауы керек.

Берілген теңдеудегі $f(x, y)$ функциясы үздіксіз болғандықтан, бағыттар өрісі де үздіксіз болады, яғни жақын жатқан нүктелердегі векторлардың бағыттары да бір-біріне жақын болады. Оның үстіне $f(x, y)$ функциясы бізмәндес болғандықтан, ол теңдеудің интегралдық қисықтары бірін бірі кесіп өтпейді, бірақ жанасуы мүмкін.

Барлық нүктесінде өрістің бағыты бірдей болатын сызықты дифференциалдық теңдеудің изоклинасы (біркелкі иілу сызығы) деп атайды. Бұл сызықтар

$$f(x, y) = K \quad (11)$$

теңдеуі арқылы анықталады.

1.4. Дифференциалдық теңдеудің шешімдері әдетте кез келген тұрақты санға байланысты болады. Сондықтан да дифференциалдық теңдеудің шешімдері шексіз жиын құрайды. Мысалы, $y' = 2x$ теңдеуінің шешімін $y = x^2 + C$ түрде жазуға болады. Мұндағы, C – кез келген тұрақты сан. Осы C санын өзгерте отырып, әртүрлі парабодалар жиынын аламыз.

Практикалық есептерді шешкенде теңдеудің барлық шешімдерін табу емес, белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын шешімді табу талап етіледі. Осындай есептің бір түрі Коши есебі деп аталады. Ол былай қойылады: берілген (5) теңдеудің барлық шешімдерінің арасынан тәуелсіз айнымалының берілген x_0 мәнінде берілген y_0 мәнін қабылдайтын, яғни

$$y(x_0) = y_0 \quad (12)$$

шартын қанағаттандыратын $y = y(x)$ шешімін табу керек. Қысқаша бұл есепті былай жазады:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (13)$$

Мұндағы, x_0, y_0 сандарын бастапқы мәндер, ал (12) теңдікті бастапқы шарт деп атайды. Осыған байланысты Коши есебін бастапқы есеп дейді.

Коши есебіне геометриялық түсініктеме беруге болады: (5) теңдеудің барлық интегралдық қисықтарының ішінен белгілі бір $M(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетінін табу керек.

Егер (5) теңдеудегі тәуелсіз айнымалы x -ты уақыт деп есептесек, ал теңдеудің шешімі кейбір M нүктесінің қозғалыс заңын өрнектейді десек, онда Коши есебіне механикалық түсінік беруге де болады: барлық қозғалыстардың ішінен бастапқы уақытта белгілі бір қалыпта тұрған нүктенің кейінгі қозғалысын табу керек.

Коши есебінің мақсаты берілген шартты қанағаттандыратын бір шешімді табу болғандықтан, ол есептің шешімі қай кезде бар және жалғыз болады деген сұрақтың тууы орынды. Бұл сұраққа жауап беретін теоремаларды келесі бір бөлімде келтіреміз.

Жоғарыда айтылғандай, дифференциалдық теңдеуді интегралдау нәтижесінде кез келген тұрақты саннан тәуелді функция аламыз:

$$y = \varphi(x, C) \quad (14)$$

Мұндай шешімдер жиынтығын жалпы шешім деп атайды. Жалпы алғанда (14) қатынастан кез келген Коши есебінің шешімін таба аламыз. Ол үшін бастапқы мәндерге сәйкес келетін C санын табу керек болады. Осы мақсатпен жалпы шешімнің төмендегідей анықтамасы қабылданған.

Анықтама-2. Айталық, $D \subset R^2$ облысы (5) теңдеудің Коши есебі шешімінің жалғыздық шарты орындалатын облыс болсын. Өзінің аргументтерінің кейбір облысында анықталған және x бойынша үздіксіз дифференциалданатын (14) функция (5) теңдеудің жалпы шешімі деп аталады, егер ол төмендегідей екі шартты қанағаттандырса:

1) D облысында (14) теңдік C саны бойынша шешілсе, яғни

$$C = \psi(x, y) \quad (15)$$

2) тұрақты санның (15) өрнекпен анықталған кез келген мәнінде (14) функция (5) теңдеудің шешімі болса.

Бұл анықтамадан Коши есебінің кез келген бастапқы мәнді қанағаттандыратын шешімін табуға болады. Шынында да, жалпы шешім (14) өрнекке бастапқы x_0 және y_0 сандарын қойсақ, онда

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

теңдігін аламыз. Анықтама бойынша бұл өрнек C саны бойынша шешіледі: $C = \psi(x_0, y_0) \equiv C_0$. Осы табылған мәнді бастапқы (14) қатынасқа қойсақ,

$$y = \varphi(x, C_0)$$

өрнегін аламыз. Бұл іздеген шешіміміз болады.

Егер (14) өрнектің орнына мынадай қатынасты

$$y = \varphi(x, x_0, y_0) \quad (16)$$

алсақ, мұндағы x_0 - берілген тұрақты сан деп, ал y_0 -ты кез келген сан деп ұйғарсақ, онда (16) қатынасты Коши түріндегі жалпы шешім деп атайды.

Кез келген нүктесінде Коши есебінің жалғыздық шарты орындалатын шешім дербес шешім деп аталады да, кез келген нүктесінде жалғыздық шарты орындалмайтын шешім ерекше шешім деп аталады. Ерекше шешімнің кез келген нүктесі арқылы кем дегенде екі шешім өтеді. Дербес және ерекше шешімдерді басқаша да анықтауға болады: жалпы шешімдегі кез келген тұрақты C санының белгілі бір мәніндегі шешімді дербес шешім деп, ал сол санның кез келген шектелген немесе шексіз мәндерінде алынбайтын шешімді ерекше шешім деп атайды.

Дифференциалдық теңдеуді интегралдағандағы жалпы шешім айқындалмаған түрде алынатын болса, яғни

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (17)$$

түрінде берілсе, онда осы (17) өрнекті теңдеудің жалпы интегралы деп атайды.

Егер соңғы қатынас

$$\psi(x, y) = C \quad (18)$$

түрінде берілсе, ондағы $\psi(x, y)$ функциясы теңдеудің интегралы деп аталады да, (18) қатынас теңдеудің бірінші интегралы деп аталады. Осындағы $\psi(x, y)$ функциясының бір қасиетін айта кету керек: белгісіз y -тің орнына берілген (5) теңдеудің кез келген шешімін қойғанда ол тұрақты санға айналады. Әдетте, интегралды осы қасиет бойынша да анықтайды: D облысында анықталған және дифференциалданатын, тұрақтыға өздігінен келтірілмейтін, ал (5) теңдеудің кез келген шешімінің бойымен алынғанда тұрақты санға тепе-тең $\psi(x, y)$ функциясын (5) теңдеудің интегралы деп атайды.

Кейде дифференциалдық теңдеудің интегралының басқаша анықтамасы да қолданылады: $\psi(x, y)$ функциясы берілген (5) теңдеудің интегралы деп аталады, егер оның осы теңдеу бойынша алынған толық дифференциалы нөлге тең болса, яғни

$$d\psi|_{(5)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy|_{(5)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} f(x, y) dx = 0 \quad (19)$$

Бұл анықтамалар бір-біріне мағыналас түсініктер. Сондықтан оларды алмастырып қолдана беруге болады.

§2. Айнымалылары ажыратылатын теңдеулер

2.1. Берілген теңдеудің шешімін сол теңдеуге кіретін функциялар және олардың интегралы түрінде өрнектеуді теңдеуді квадратура арқылы интегралдау деп атайды. Бұл параграфта кейбір оңай интегралданатын теңдеулердің түрлерін келтірейік.

1⁰. Теңдеудің оң жағы белгісіз функцияға тәуелсіз:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1)$$

Мұнда $f(x)$ функциясы берілген, $\langle a, b \rangle$ аралығында үздіксіз деп есептелінеді. Бұл теңдеудің жалпы шешімін табу үшін одан анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$y = \int f(x) dx + C \quad (2)$$

Бұл өрнек Коши түрінде былай жазылады:

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0 \quad (3)$$

Мұнда x_0 – берілген сан деп, y_0 – кез келген сан деп есептелінеді.

2⁰. Теңдеудің оң жағы белгісіз функцияға ғана тәуелді:

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \quad (4)$$

Мұнда $f(y)$ функциясы кейбір $\langle c, d \rangle$ аралығында үздіксіз деп есептелінеді және осы аралықта нөлге айналмасын. Онда бұл теңдеуді аударып жазуға болады:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad (5)$$

Соңғы теңдеудің жалпы шешімін табу үшін оның екі жағын dy -ке көбейтіп, анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C \quad (6)$$

немесе Коши түрінде:

$$x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)} + x_0 \quad (7)$$

Мұнда y_0 – тұрақты сан деп, ал x_0 – кез келген сан деп есептелінеді.

3⁰. Жоғарыда келтірілген теңдеулер айнымалылары ажырайтын теңдеулер қатарына жатады. Мұндай теңдеулердің жалпы түрі былай жазылады:

$$f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0 \quad (8)$$

Осы теңдеуде $f_2(y)$ және $f_3(x)$ функциялары берілген облыста нөлге тең болмаса, онда теңдеудің екі жағын $f_2(y)f_3(x)$ көбейтіндісіне бөлсек, мынандай қатынас аламыз:

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0 \quad (9)$$

Бұл келтіру айнымалыларды ажырату тәсілі деп аталады. Жалпы, айнымалыларды ажырату деп dx -тың алдында тек x -қа тәуелді, ал dy -тың алдында тек y -ке тәуелді функциялардың тұруын қамтамасыз етуді айтады.

Соңғы теңдеудің жалпы шешімін табу үшін екі жағынан анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = C \quad (10)$$

немесе Коши түрінде:

$$\int_{x_0}^x \frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int_{y_0}^y \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0 \quad (11)$$

4⁰. Айнымалылары ажырайтын теңдеулер қатарына басқа да теңдеулерді жатқызуға болады. Олар кейбір алмастырулар арқылы оңай интегралданады. Солардың бірі:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by) \quad (12)$$

түріндегі теңдеулердің $z = ax + by$ алмастыруы арқылы айнымалылары оңай бөлінеді. Шынында да, соңғы алмастырудан туынды тауып, теңдеуге қоятын болсақ, мынандай қатынастар аламыз:

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$$

немесе

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

Соңғы қатынастан:

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

яғни айнымалылар бөлінді. Осыдан интеграл алсақ, онда жалпы интегралды мына түрде жазуға болады:

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C \quad (13)$$

5⁰. Екінші бір келетін теңдеулер түрі – біртекті теңдеулер. Әдетте, біртекті теңдеу деп берілген теңдеудің оң жағындағы $f(x, y)$ функциясы кез келген s саны үшін

$$f(sx, sy) = s^m f(x, y) \quad (14)$$

теңдігін қанағаттандыратын жағдайды айтады. Мұнда m -саны біртектіліктің дәрежесі деп аталады.

Егер $s = \frac{1}{x}$ деп алсақ, онда $f(sx, sy) = f(1, \frac{y}{x}) = \varphi(\frac{y}{x})$ болады да, теңдеуді былай жазуға болады:

$$\frac{dy}{dx} = f(1, \frac{y}{x}) = \varphi(\frac{y}{x}) \quad (15)$$

Мұндай теңдеулердің $z = \frac{y}{x}$ алмастыруы арқылы айнымалыларын бөлуге болады:

$$y = zx, \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$$

Осыдан

$$x \frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z$$

теңдеуін аламыз. Егер $\varphi(z) - z \neq 0$, онда

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

Бұдан интегралдау арқылы

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + \ln C$$

өрнегін аламыз. Логарифмсіз жазатын болсақ, онда

$$Cx = e^{\int \frac{dz}{\varphi(z)-z}} \quad (16)$$

түріндегі қатынасты аламыз. Соңғы интегралдың алғашқы функциясы айқындалса, ондағы z –тың орнына $\frac{y}{x}$ өрнегі қойылуы керек.

6⁰. Мына түрдегі теңдеулер

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (17)$$

біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер деп есептелінеді. Мұнда алдымен c_1 және c_2 сандарынан құтылуға болады. Ол үшін екі түзудің

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

қиылысу нүктелерін тауып, координат жүйесінің бас нүктесін сол нүктеге көшіру керек. Айталық, (α, β) осы екі түзудің қиылысу нүктесі болсын. Бұл жағдайда

$$u = y - \beta, v = x - \alpha$$

алмастыруларын енгізсек, онда берілген теңдеу біртекті теңдеуге келеді:

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_1v + b_1u}{a_2v + b_2u}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{u}{v}}{a_2 + b_2 \frac{u}{v}}\right) = \varphi\left(\frac{u}{v}\right) \quad (18)$$

Бұл теңдеу алдындағы теңдеу сияқты, $u = tv$ алмастыруы арқылы оңай интегралданады.

Егер жоғарыда көрсетілген екі түзу қиылыспаса, онда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ қатынасы орындалады да, бұл жағдайда $z = a_1x + b_1y$ алмастыруы арқылы теңдеудің айнымалылары оңай бөлінеді.